UFF - Universidade Federal Fluminense
IME - Instituto de Matemática e Estatística
GGM - Departamento de Geometria
Disciplinas: GGM 00127, GGM 00125 , GGM 00160

4^a Lista de Exercícios - Conteúdo de Geometria Analítica Espacial
Vetores

AQUECIMENTO

1. Calcule o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos abaixo:
   (a) $\vec{u} = (1, 0, 5)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$
   (b) $\vec{u} = (1, 7, 5)$, $\vec{v} = (1, 1, -5)$
   (c) $\vec{u} = (1, 2, \sqrt{31})$, $\vec{v} = (4, 3, 0)$
   (d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, t, s)$
2. Calcule o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos abaixo e verifique se os vetores são ou não colineares.
   (a) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$
   (b) $\vec{u} = (3, 7, 9)$, $\vec{v} = (9, 21, 27)$
   (c) $\vec{u} = (1, -3, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$
   (d) $\vec{u} = (1, 7, 5)$, $\vec{v} = (1, 1, -5)$
   (e) $\vec{u} = (3, 4, 0)$, $\vec{v} = (6\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, 0)$
   (f) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, t, s)$
3. Dados os vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ ache o volume do paralelepípedo formado por eles nos casos abaixo:
   (a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$
   (b) $\vec{v}_1 = (3, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (5, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (0, -4, 0)$
   (c) $\vec{v}_1 = (7, 5, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 5, -2)$, $\vec{v}_3 = (13, 1, 1)$
   (d) $\vec{v}_1 = (4, -3, 0)$, $\vec{v}_2 = (8, -6, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, -\pi, \pi^3)$
   (e) $\vec{v}_1 = (1, -7, -2)$, $\vec{v}_2 = (3, 9, 12)$, $\vec{v}_3 = (0, 7, -2)$
   (f) $\vec{v}_1 = (-9, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-3, 1, 35)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 0)$
4. Dados os pontos A e B abaixo, encontre as coordenadas vetor $\vec{u} = \vec{AB}$, a distância entre A e B e o módulo do vetor $\vec{u}$.
   (a) $A = (0, 0, 0)$ e $B = (1, 2, 3)$.
   (b) $A = (2, 1, -3)$ e $B = (1, -5, 7)$.
   (c) $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, 1, 7)$.
   (d) $A = (0, 2, 1)$ e $B = (-1, -2, -3)$.

BÁSICO

1. Mostre que $((1, 2, 3) \times (1, 0, 2)) \times (1, 0, 0)$ é diferente de $(1, 2, 3) \times ((1, 0, 2) \times (1, 0, 0))$. Isto mostra que o produto vetorial não é associativo.
2. Encontre os pontos $C = (x, 0, 0)$ sobre o eixo Ox equidistande dos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (-2, 1, -3)$.
3. Para que valores de m os vetores $\vec{u} = (1, m, 3m + 1)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 3)$ são ortogonais?
4. Para que valores de m os pontos $A = (1, m - 1, 2m + 1)$ dista 2 do ponto $B = (1, 2, 3)$.
5. Se os pontos A, B, C são vértices de um paralelogramo $ABCD$, determine o ponto D, onde:
   (a) $A = (0, 0, 0), B = (1, 2, 3)$ e $C = (-1, 1, 3)$
   (b) $A = (1, 2, 3), B = (-1, 3, 1)$ e $C = (4, 1, 3)$
6. Determine $t \in \mathbb{R}$, caso exista, para que os vetores $(t, -1, 1), (1, t, 2), (3, t, 1)$ sejam coplanares.

1. Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos abaixo.
   (a) Se $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$, $||\vec{u}|| = 2$ e $||\vec{v}|| = 3$.
   (b) Se $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, $||\vec{u}|| = 1$ e $||\vec{v}|| = 7$.
2. Calcule $(\sqrt{2}\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v} + \vec{w}) \times (-\sqrt{6}\vec{u} + 3\vec{v} - \sqrt{3}\vec{w})$.
3. Prove que:
   (a) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{v} \times \vec{u}$.
   (b) $(\vec{v} - \vec{u}) \times (\vec{w} - \vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$.
4. Encontre os vetores $\vec{v}$ de norma 3 que são perpendiculares ao vetor $(1, 1, -1)$ e satisfazem $\langle \vec{v}, (-1, -1, 2) \rangle = 2$.
5. Sejam $A = (3, 2, 4), B = (4, 4, 4), C = (6, 3, 5)$ e $D = (4, 1, 5)$.
   (a) Determine a altura relativa à base de lados paralelos a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ do paralelepípedo de arestas $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.
   (b) Calcule a área do triângulo cujos vértices são A, B e C.
   (c) Calcule o volume do paralelepípedo do paralelepípedo de arestas $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.